Les Francs Bourgeois - La Salle
Frères des Écoles Chrétiennes

DST de :	MATHEMATIQUES EXPERTES		
Date du DST :	Jeudi 11 décembre 2025	Durée de l'épreuve :	1h30 heure
Nom du professeur :	Mme FAHLAOUI	Groupe :	TOPTMATEX1
Matériel autorisé :	• L'usage de la calculatrice est interdite pour cette épreuve.		
Consignes particulières :	• Mettre la copie dans la pochette en entourant les bonnes réponses du QCM et ne pas rendre le sujet. La figure de la pochette page 4 est à compléter. • Soigner la rédaction.		

Exercice 1

Vous devez répondre aux 10 questions.

Une seule réponse exacte par question.

*Sur la pochette jointe (**annexe pages 2 et 3**), pour chaque question, entourez la bonne réponse.*

Aucune justification n'est demandée.

Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point, une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ (unité graphique 2 carreaux).

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3+(-8+\mathrm{i})z^2+(17-8\mathrm{i})z+17\mathrm{i}=0$$

Partie I : Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-\mathrm{i}$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que :

$$z^3+(-8+\mathrm{i})z^2+(17-8\mathrm{i})z+17\mathrm{i}=(z+\mathrm{i})\left(az^2+bz+c\right)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

Partie II

On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4 + \mathrm{i}$, $4 - \mathrm{i}$ et $-\mathrm{i}$.

1. Placer les points A, B et C dans le repère donné sur la pochette (**annexe page 4**), figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. *Dans cette question, il faudra laisser les traits de construction visibles*

   Le point Ω est le point d'affixe 2. Le point S est défini par : $\begin{cases} \Omega S = \Omega A \\ (\overrightarrow{\Omega A};\overrightarrow{\Omega S}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

   Construire à la règle et au compas le point S.
3. On admet que l'affixe de S est $z_S = 1 + 2\mathrm{i}$.

   Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathcal{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z + 10 - 2\mathrm{i}}{z - 2}$.
   (a) Déterminer les affixes des points A', B', C' associés respectivement aux points A, B et C.
   (b) Vérifier que A', B', C' appartiennent à un cercle $\mathcal{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathcal{C}'$.
   (c) Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z' - \mathrm{i}|$ en fonction de z.
   (d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathcal{C}$. Démontrer que $|z' - \mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$.
   (e) En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathcal{C}$.